LA LÓGICA CUÁNTICA

Sergio F. Martínez Muñoz

I. INTRODUCCIÓN

La mecánica cuántica constituye la teoría más revolucionaria y fundamental de la física moderna. Si bien su adecuación empírica (en tanto que descripción de procesos estadísticos) está ampliamente confirmada, su estructura conceptual nunca ha sido elucidada a cabalidad. Esta estructura conceptual es tan diferente de la estructura conceptual de las teorías de la física clásica que desde los inicios de la teoría ha sugerido propuestas radicales en los fundamentos de la teoría de la probabilidad, la lógica, y la filosofía en general. En este artículo veremos cómo el examen de la estructura semántica de la teoría cuántica nos lleva al estudio de una clase de *lógicas no clásicas* genéricamente conocidas con el nombre de lógicas cuánticas. No asumiremos ningún conocimiento de la física cuántica, pero sí cierta familiaridad con el análisis semántico de la lógica (ver el artículo 1 en este volumen). En la segunda sección muestro cómo surge la lógica cuántica a partir de la consolidación de una analogía entre la estructura semántica de la teoría cuántica y la estructura semántico-algebraica del cálculo proposicional clásico. En la tercera sección examino muy brevemente intentos, sobre todo interesantes desde un punto de vista histórico, de entender la lógica cuántica como una lógica de varios valores. En la cuarta sección quiero dar una idea de cómo puede entenderse la lógica cuántica como lógica formal, reconstruida sintácticamente. En la quinta sección resumo algunos resultados sobresalientes de los esfuerzos por encajar a la lógica cuántica dentro de la semántica de marcos de Kripke, y de su interpretación como lógica modal. En el apéndice matemático se incluyen las definiciones básicas de la teoría de retículos necesarias para darle una precisión mínima a nuestra presentación.

II. LA LÓGICA CUÁNTICA COMO ESTRUCTURA PROPOSICIONAL NO CLÁSICA

La lógica cuántica fue propuesta inicialmente por Garett Birkhoff y John von Neumann (1936), como un intento por dar una solución radical al problema de la interpretación de la teoría cuántica. Su objetivo explícito era descubrir la estructura lógica que yace debajo de las teorías físicas que como la mecánica cuántica no se conforman a la lógica clásica. Sugirieron ellos en este trabajo seminal que la transición de la mecánica clásica a la mecánica cuántica involucra el paso de un cálculo proposicional clásico a un cálculo proposicional con una estructura no clásica. Sucintamente, la tesis de Birkhoff y von Neumann era que deberíamos considerar a una cierta estructura algebraica generada por la teoría cuántica como el álgebra de Lindebaum-Tarski de una nueva lógica, la lógica del mundo empírico, asumiendo que la mecánica cuántica es la teoría física que describe más fielmente ese mundo empírico.

Intentos por clarificar y elaborar esta propuesta desde perspectivas muy diferentes han generado una serie de investigaciones muy variadas. Principio por clarificar el sentido en el que la transición entre la física clásica y la física cuántica sugiere un cambio de lógica. Esto requiere que establezcamos una relación entre la estructura semántica de teorías físicas y un análisis semántico de la lógica. Esto lo haremos partiendo de la concepción semántica de teorías físicas que se origina con los trabajos de Beth y que ha sido desarrollada posteriormente por Van Fraassen (y otros). Llamaremos *lógica (proposicional) concreta* a una lógica (proposicional) que describe las relaciones semánticas entre las sentencias elementales en las que se ha fijado de antemano una intensión fija para los términos predicacionales (fija en el sentido que es respetada por todas las valuaciones admisibles). En este caso hablamos de un *lenguaje semi-interpretado* (Van Fraassen, 1970). Tradicionalmente la lógica se concibe como caracterizando la validez en virtud de la forma de los argumentos *únicamente;* a la lógica así entendida la llamaremos *lógica formal.* En lógicas concretas, a diferencia de las lógicas formales, se utilizan criterios semánticos, además de los puramente formales, para juzgar la validez de argumentos. Estos criterios semánticos adicionales, en el caso de la lógica cuántica concreta, se consideran dados implícitamente por la teoría cuántica. En esta sección hablamos de lógica cuántica concreta siempre. Posteriormente diremos algo muy breve acerca de la lógica cuántica formal. Una última aclaración previa es que hablaremos de la lógica cuántica haciendo referencia únicamente al cálculo proposicional cuántico. Esto no es una distorsión seria de nuestra presentación ya que las características peculiares de la lógica cuántica surgen al nivel del cálculo proposicional. El lector interesado en un compendio de la lógica cuántica de primer orden puede consultar Dalla Chiara (1986).

Según Van Fraassen, una teoría física puede caracterizarse por medio de un *lenguaje semi-interpretado* y un conjunto de leyes. El lenguaje semi-interpretado L, el portador de la estructura lógica (concreta) de la teo-

ría, consiste en una terna $<E,H,h>$; E es un conjunto de «sentencias elementales»[1]. Una sentencia elemental tiene la forma «La magnitud M tiene un valor en el conjunto (de Borel) X». La idea intuitiva es que M describe una propiedad física de un sistema dado. Por ejemplo, una magnitud de los sistemas conocidos como «partículas clásicas» es la velocidad V de una partícula. Una sentencia elemental es la sentencia «V tiene un valor en el intervalo $[1,2]$» (las unidades de la magnitud se dejan implícitas)[2]. H es el *conjunto de estados posibles* del sistema en cuestión. La función h es una *función de satisfacción* que asigna a cada sentencia elemental A en E el conjunto h(A) de estados que satisfacen A. A cada sentencia elemental A (un objeto sintáctico) corresponde la *proposición* h(A) (un objeto semántico). El conjunto de proposiciones elementales es la imagen $h[E]$ de E bajo h.

Podemos ahora formular informalmente ciertas relaciones semánticas familiares en el contexto de la lógica cuántica:

1. A es *verdadera* si y sólo si el estado de un sistema se representa por un estado de h(A).
2. A es válida si y sólo si $h(A)=H$.
3. A es una *consecuencia semántica* de B si y sólo si $h(B)\subseteq h(A)$.

El *álgebra proposicional* de un lenguaje es el conjunto de proposiciones elementales h(E) junto con las operaciones lógicas asociadas con ese lenguaje. Los lenguajes (semi-interpretados) cuánticos tienen una estructura sintáctica pobre. Las sentencias son todas atómicas. La estructura lógica de un lenguaje cuántico es más bien una característica de su estructura semántica tal y como ésta se expresa a través de su álgebra proposicional. Esta estructura puede expresarse en términos de conectores definidos semánticamente. Aquí no podemos adentrarnos en la presentación detallada que requeriría una discusión a fondo del problema de la introducción de los conectores en la lógica cuántica. Daremos sin embargo una idea de la problemática involucrada y de las razones de su interés filosófico. Seguiremos la convención de identificar dos sentencias A y B cuando $h(A)=h(B)$, esto es, cuando las sentencias son semánticamente equivalentes.

En las definiciones siguientes A, B, C, D son sentencias en un lenguaje $L=<E,H,h>$.

1. Hay una tendencia en la lógica cuántica, empezando con el trabajo de Birkhoff y von Neumann, a hablar indistintamente de propiedades de sistemas físicos y de proposiciones. Esta ambigüedad reaparece en la manera como hemos definido el conjunto de sentencias elementales. Más correctamente E es un conjunto de predicados monádicos elementales. Las sentencias elementales propiamente dichas pueden construirse a partir de estos predicados elementales en el contexto de una teoría física particular. Este tipo de ambigüedades las ignoraremos en pro de una mayor claridad expositiva.

2. Una magnitud puede definirse de manera abstracta como un conjunto de proposiciones (o propiedades) mutuamente excluyentes (*i.e.* tal que a lo más uno de los valores de la magnitud es el caso en un momento dado). Esta es la definición de magnitud apropiada en la formulación de una teoría de la mecánica en el marco de una teoría de retículos.

Definición: una sentencia C es la *conjunción* de A y B precisamente si $h(C) = h(A) \cap h(B)$.

Definición: una sentencia D es la *disyunción exclusiva* de A y B precisamente si $h(D) = h(A) \cup h(B)$.

Definición: una sentencia A en un lenguaje L es una *negación exclusiva* de la sentencia B precisamente cuando $h(A) = H - h(B)$.

Las operaciones «$\cap$», «$\cup$», y « – » son las operaciones usuales de la teoría de conjuntos (intersección, unión y complementación relativa). *Estas definiciones corresponden a los* conectores *clásicos (por lo general introducidos sintácticamente) si la estructura proposicional es clásica.* Esto es, si el conjunto de proposiciones es el conjunto P(H), el conjunto potencia del conjunto de los estados posibles al que llamamos H, entonces $<P(H), \cap, \cup>$ es un álgebra booleana de conjuntos isomórfica al álgebra de Lindebaum-Tarski del cálculo proposicional clásico. Similarmente, podríamos definir otros conectores modales e intensionales en este marco conjuntista. Decimos que un lenguaje es cerrado con respecto a la conjunción o disyunción (exclusiva) si cada par de sentencias tiene una conjunción o disyunción (exclusiva). Decimos que un lenguaje es cerrado con respecto a la negación (exclusiva) si cada sentencia en L tiene una negación (exclusiva). Si la conjunción corresponde a la operación de intersección de conjuntos en P(H), y la disyunción corresponde a la unión de conjuntos en P(H), entonces es claro que las operaciones lógicas son cerradas en H (ya que por definición de conjunto potencia, P(H) incluye todos los conjuntos que puedan formarse por medio de las operaciones de conjuntos). Sin embargo, *si la estructura impuesta en H por la teoría es tal que el álgebra proposicional no corresponde al álgebra de conjuntos generada por P(H), entonces no está garantizado que las operaciones lógicas, correspondientes a los* conectores exclusivos *tal y como fueron definidas arriba, sean cerradas en H.* Por ejemplo, los lenguajes intuicionistas y las lógicas de varios valores no son cerrados con respecto a la negación exclusiva. Son cerrados con respecto a otro tipo de negación «selectiva» o de «alcance restringido», que es la negación semánticamente apropiada para estos lenguajes[3]. Este tipo de negación selectiva se caracteriza porque una sentencia A y su negación selectiva A* pueden ser ambas no verdaderas simultáneamente (véase por ejemplo Rasiowa, 1974).

Algo similar sucede en la lógica cuántica. El conjunto H, según la mecánica cuántica, tiene asociada una estructura proposicional que no es cerrada con respecto a la negación exclusiva; además, y esto es algo peculiar de la lógica cuántica, no es cerrada con respecto a la disyunción exclusiva.

En la mecánica cuántica el conjunto de estados H tiene una estructura matemática significativamente diferente al conjunto de estados clá-

3. Van Fraassen le atribuye esta distinción entre «negación exclusiva» y «negación selectiva» (*choice negation*) a Mannoury, en sus trabajos de fundamentación del intuicionismo (ver Van Fraassen, 1974).

sicos (es un espacio complejo separable de Hilbert). Las sentencias elementales corresponden en este caso a subespacios (cerrados) del espacio H, y hay subconjuntos de H que no son subespacios. No es necesario que el lector entienda esta terminología matemática para captar la diferencia básica entre un lenguaje clásico y un lenguaje cuántico, ya que la diferencia, como vemos a continuación, se refleja en la semántica noclásica de un lenguaje cuántico. Para explicar esta afirmación requeriremos el uso de algunos términos algebraicos que se definen en el apéndice.

El *álgebra proposicional cuántica* es una estructura (reticular) cerrada bajo la operación de intersección en H, pero no es cerrada ni bajo la unión de conjuntos, ni bajo la operación de complemento relativo (que corresponde a la negación exclusiva). No obstante, la lógica cuántica tiene definiciones alternativas de operaciones algebraicas cerradas que pueden pensarse como las operaciones lógicas correspondientes a la negación y disyunción cuántica. Estas operaciones son la *ortocomplementación* y la *operación de junta* (el resultado de la cual es el «extremo superior» de un par de elementos) en el retículo de los subespacios de H. No entraremos a definiciones detalladas, en su lugar pasamos a ilustrar estas operaciones en un ejemplo simple de un álgebra proposicional cuántica.

El conjunto de los subespacios de un espacio euclidiano de tres dimensiones, E, con las operaciones de intersección de conjuntos, $\cap$, y la operación de suma lineal $\oplus$, forma un retículo cuántico, esto es, un retículo que puede interpretarse como una lógica cuántica. Los subespacios de este espacio son el origen del sistema de coordenadas que se identifica con el cero del retículo, los subespacios de una dimensión (que geométricamente corresponden a las líneas que atraviesan el origen), los subespacios de dos dimensiones (que geométricamente corresponden a los planos que intersectan el origen en cualquier ángulo), y el espacio total, el único subespacio de tres dimensiones. La intersección de dos líneas cualesquiera es el origen, la suma lineal de dos líneas es el subespacio (plano) generado por las líneas. La intersección de dos planos es la línea en que se intersectan, y la suma lineal de dos planos (diferentes) es el espacio total H(S). Nótese que en este retículo $<E, \cap, \oplus>$ podemos definir siempre un orden parcial como sigue: $A \leq B$ si $A \oplus B = B$. Este orden parcial en nuestro ejemplo corresponde a la relación de inclusión de conjuntos. Una magnitud en este ejemplo es un conjunto de subespacios mutuamente excluyentes (*i.e.* para todo par de subespacios en la magnitud su intersección es $\emptyset$) y cuya unión es el conjunto total. Una magnitud máxima en general es un conjunto máximo de proposiciones mutuamente excluyentes. En nuestro ejemplo una magnitud máxima es un conjunto de tres líneas linealmente independientes (no paralelas entre sí) que geométricamente describen un sistema de coordenadas. Es fácil ver con un ejemplo que este retículo no es distributivo. Consideremos una línea D que no coincide con ninguna de las líneas (direcciones) A, B, C. Es claro que $D \wedge A = 0$, $D \wedge B = 0$, $D \wedge C = 0$, y por lo tanto: $(D \wedge A) \vee (D \wedge B) \vee (D \wedge C) = 0$. Sin embargo, $(A \wedge B \wedge C) \wedge D = D \neq 0$.

Este ejemplo muestra que un retículo proposicional cuántico no satisface la *ley distributiva*. Sin embargo, puede mostrarse que un retículo cuántico satisface la condición de *ortomodularidad:* $A<B \Rightarrow B = A \vee (B \wedge A^{\perp})$. $A^{\perp}$ es el orto-complemento de A, correspondiente a la negación selectiva de A (ver apéndice). Una buena parte del desarrollo del programa de lógica cuántica posterior al trabajo de Birkhoff y von Neumann puede verse como un intento por interpretar esta ley de orto-modularidad (ver Jauch, 1968, por ejemplo), y de entender el sentido en que, supuestamente, esta ley ortomodular podría jugar un papel similar al que juega la distributividad en los cálculos clásicos. En el trabajo original de Birkhoff y von Neumann, así como en el ejemplo que dimos anteriormente, la estructura proposicional satisfacía una condición más fuerte que la orto-modularidad, la modularidad. Un retículo es modular si satisface la siguiente ley: $A \leq B \Rightarrow (A, B, X)$ es una tripleta distributiva, para cualquier X en L. Puede mostrarse que un retículo modular es la estructura más débil en la cual una teoría de las probabilidades clásica puede formularse. Esto les sugirió a Birkhoff y von Neumann que la estructura proposicional podía pensarse como una teoría generalizada de conjuntos en la que la dimensionalidad jugaba el papel de la cardinalidad y las probabilidades de transición entre sucesos eran inducidas por automorfismos del retículo. Este programa sin embargo nunca llegó a desarrollarse más allá de algunas notas no publicadas de von Neumann, aunque sí dio lugar al desarrollo de una teoría matemática de envergadura (La teoría de las geometrías continuas de von Neumann).

Hay una serie de trabajos que parten de la convicción de que la estructura reticular incluye estructura que no puede justificarse físicamente, y tratan de estudiar estructuras más débiles. Trabajos significativos en esta dirección son los de Kochen y Specker (1967), Strauss (1937). Nuestra exposición, así como estos trabajos recién mencionados, se enmarcan en lo que se denomina el enfoque algebraico a la lógica cuántica.

La lógica cuántica es también otras cosas. Menciono a continuación algunas de las principales tradiciones alternativas.

III. LA LÓGICA CUÁNTICA COMO LÓGICA DE VARIOS VALORES

Una formulación de la lógica cuántica como una lógica de varios valores fue propuesta por Hans Reichenbach (basado en un formalismo de Lukasiewicz) en su libro sobre los fundamentos filosóficos de la mecánica cuántica (Reichenbach, 1944). Reichenbach proponía una lógica de tres valores como una manera de resolver los problemas de la interpretación de las descripciones mecánico-cuánticas del mundo. Sin embargo, a diferencia de la manera como presentamos la lógica cuántica en la sección anterior, Reichenbach pretendía no una descripción de la estructura lógica de los postulados descriptivos de la mecánica cuántica, sino más bien la formulación de la base *lógico-lingüística* para la formulación de una teoría alternativa. La exposición más clara y detallada, así como el análisis más a fondo, de la propuesta de Reichenbach se encuentra en una serie de trabajos de Gary Hardegree (ver, por ejemplo, Hardegree, 1977). Hardegree introduce una distinción entre lenguaje observacional y lenguaje de la formulación de la teoría y arguye convincentemente que no hay necesidad de implementar una lógica no clásica en el lenguaje de formulación de la teoría, si bien reconoce que el lenguaje observacional tiene una estructura no clásica. El programa de Reichenbach ha sido abandonado, pero las intuiciones básicas de su enfoque se han retomado y desarrollado fértilmente en el enfoque modal del que hablaremos en la sección V.

IV. LA LÓGICA CUÁNTICA COMO LÓGICA FORMAL

La lógica cuántica concreta trata de la estructura lógica de las proposiciones generadas por la estructura semántica de la mecánica cuántica. La lógica cuántica formal, como toda lógica formal, requiere que hagamos explícita una sintaxis y que abandonemos los postulados semánticos (y el lenguaje semi-interpretado) que en la lógica cuántica concreta nos limitan a un discurso de objetos. En la lógica formal tanto los objetos como los símbolos que utilizamos para referirnos a ellos son parte de la teoría. No hay, sin embargo, una sola sintaxis que pueda reconstruirse a partir de la estructura lógico-algebraica de la teoría cuántica. Los diferentes sistemas que se han propuesto y se siguen proponiendo tienen diferencias lógicas y metalógicas importantes. Para varios sistemas de lógica cuántica formal se ha demostrado su *corrección* y *completitud*. Por lo general las pruebas de completitud proceden de la manera usual, construyendo el álgebra asociada de Lindenbaum-Tarski determinada por la axiomatización propuesta (ver, por ejemplo, Stachow, 1976; Dalla Chiara, 1986).

Con respecto a la decidibilidad de los diferentes sistemas de lógica cuántica hay una serie de resultados interesantes. La decidibilidad de la lógica clásica puede mostrarse utilizando tablas de verdad. Este método no funciona para demostrar la decidibilidad de la lógica intuicionista, pero en este (y muchos otros casos) la decidibilidad puede demostrarse a través del establecimiento de la propiedad del modelo finito (una técnica muy desarrollada en lógicas modales). Estas técnicas no pueden aplicarse en el caso de muchas lógicas cuánticas formales. Otras técnicas han sido ensayadas, pero para una buena parte de las lógicas cuánticas formales la decidibilidad no ha sido demostrada. En el caso de lógicas cuánticas débiles (orto-lógicas por ejemplo) es posible demostrar la decibilidad por medio de la traducción en lógicas modales. Pero para lógicas cuánticas que incluyen la propiedad ortomodular, y que supuestamente serían aquellas lógicas sancionadas por la mecánica cuántica como físicamente significativas, esta técnica no es aplicable. Goldblatt (1984) ha mostrado que la orto-modularidad del retículo de subespacios de un espacio de Hilbert H no está determinada por ninguna propiedad de primer orden de la relación de ortogonalidad. Este resultado sugiere que la lógica cuántica tiene limitaciones de capacidad de expresión serias, por lo menos si se identifica como es usual con lógicas ortomodulares. Quizás valga la pena retomar la idea inicial de Birkhoff y von Neumann según la cual la lógica cuántica obedece la condición de modularidad, partiendo de la hipótesis de que la formulación de la mecánica cuántica en términos de espacios de Hilbert es sólo aproximadamente correcta. Lo más probable es que este tipo de desarrollo tenga que esperar nuevos adelantos en la manera de conceptualizar teorías físicas.

V. SEMÁNTICA DE KRIPKE E INTERPRETACIÓN MODAL DE LA LÓGICA CUÁNTICA

La semántica de Kripke desarrollada en los años cincuenta y sesenta de este siglo (por Kripke y otros) es una teoría unificada de la semántica que permite una clasificación bastante general de muchos sistemas lógicos (ver capítulo 12 en este volumen). Es posible extender esta teoría y formular una semántica de marcos de Kripke para la lógica cuántica. Una característica de los modelos de Kripke generalizados que resultan ser adecuados para la lógica cuántica es que la relación de acceso es reflexiva y simétrica, pero no transitiva. En las lógicas no-clásicas más comunes (como la lógica intuicionista y muchas lógicas modales) la relación es por lo menos reflexiva y transitiva. Es posible también dar una semántica algebraica para la lógica cuántica y mostrar que esta semántica es equivalente a la semántica de modelos de Kripke (Dalla Chiara, 1986).

No sólo es posible dar una semántica de Kripke para la lógica cuántica, sino que es también posible traducir la lógica cuántica a una lógica modal de una manera paralela a la traducción de Mckinsey-Tarski de la lógica intuicionista en la lógica modal S_4. Goldblatt (1974) ha hecho una traducción de una lógica cuántica débil, que él llama orto-lógica (en la que los marcos, llamados por él orto-marcos, son orto-retículos) en el sistema modal B. Posteriormente Dishkant (1977) ha construido una traducción de la lógica orto-modular en un sistema que él llama B+, que es intermedio entre B y S_5.

VI. RESUMEN Y CONCLUSIONES

En la primera parte de este artículo hemos visto cómo surgió la lógica cuántica a partir del desarrollo de una analogía entre la estructura reticular de la lógica clásica concreta (generada por la física clásica) y la estructura reticular de las proposiciones físicas sancionadas por la mecánica cuántica. La mecánica cuántica es supuestamente la teoría más confiable y general que tenemos. Esto sugiere que la lógica cuántica es *la*

lógica del mundo empírico. Putnam, elaborando ideas de Finkelstein, ha sugerido la analogía con el abandono de la geometría euclideana debido al desarrollo de la teoría de la relatividad de Einstein (Putnam, 1969; Finkelstein, 1969). Sin embargo, como hemos visto, no hay una sola lógica cuántica, sino una serie de sistemas lógicos con diferencias lógicas y meta-lógicas significativas. Además, en tanto que la relación de acceso de la lógica cuántica no reciba una interpretación física y lógica satisfactoria no es posible clarificar el sentido en que se propone la lógica cuántica como lógica alternativa, o por lo menos no es clara la pertinencia de la adecuación empírica de la mecánica cuántica para tal proyecto.

VII. APÉNDICE

En este apéndice se incluyen algunas definiciones de la teoría de retículos requeridas para clarificar la exposición.

Un conjunto ordenado es un par ordenado $L = \langle A, \leq \rangle$, donde A es un conjunto no vacío y $\leq$ es una relación parcialmente ordenada. L es un retículo si además para cada par de elementos existen el extremo superior y el extremo inferior. Un elemento z es *el extremo inferior* de un par de elementos $\{x,y\}$ si $x \geq z$, $y \geq z$, y además, si hay otro elemento w con la misma propiedad, entonces $z \geq w$. De manera dual se define la noción de extremo superior. El extremo inferior de un par de elementos se designa por el símbolo $x \wedge y$, y se lee «cuña de x, y». El extremo superior de un par de elementos se designa por el símbolo $x \vee y$, y se lee «junta de x, y». El ejemplo paradigmático de un retículo es el retículo formado por todos los subconjuntos de un conjunto (el conjunto potencia) con las operaciones de intersección y unión.

Un retículo ortocomplementado, o simplemente, un *orto-retículo*, es un retículo con 0 y 1 y con una ortocomplementación. Una *ortocomplementación* es un mapeo de L en L que satisface:

i) $a \vee a^{\perp} = 1$, $a \wedge a^{\perp} = 0$
ii) $a \leq b \Rightarrow a^{\perp} \geq b^{\perp}$
iii) $a^{\perp\perp} = a$

Una tripleta de elementos es *distributiva* si

(D) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

Un retículo es *distributivo* si para cada tripleta a, b, c en L se satisface (D). Un retículo es *modular* si satisface la condición

(M) $a \leq b \Rightarrow (a,b,x)$

es una tripleta distributiva para todo $x \in L$. Un retículo es *orto-modular* si satisface la siguiente condición:

(OM) $a \leq b \Rightarrow b = a \vee (b \wedge a^{\perp})$ para cualquier par de elementos a y b.

Un retículo booleano es un orto-retículo distributivo. Para retículos distributivos la ortocomplementación es un automorfismo dual, por lo que el orto-complemento de un elemento es único. El retículo $\langle P(A),$

∩, ∪>, en donde P(A) es el conjunto potencia de cualquier conjunto A, es un retículo booleano. El álgebra de Lindebaum-Tarski del cálculo proposicional clásico es un retículo booleano. Una introducción elemental a la teoría de retículos distributivos en español es Hermes, 1963.

BIBLIOGRAFÍA

Beltrametti, E. y van Fraassen, B. C. (comps.) (1979), *Current Issues in Quantum Logic*, Plenum Press, New York-London.

Birkhoff, G. y von Neumann, J. (1936), «The Logic of Quantum Mechanics»: *Ann. Math.*, 37, 823-843. Reproducido en C. A. Hooker (comp.), 1975.

Dalla Chiara, M. L. (1977), «Quantum Logic and physical modalities»: *Journal of Philosophical Logic*, 6, 391-404.

Dalla, Chiara, M. L. (1986), «Quantum Logic», en D. Gabbay y F. Guenthner (comps.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. III, Reidel, Dordrecht-Boston.

Dishkant, H. (1977), «Imbedding of the quantum logic in the modal system of Brouwer»: *Journal of Symbolic Logic*, 42, 321-328.

Finkelstein (1969), «Matter Space and Logic», en C. A. Hooker (comp.), 1979, 123-139.

Goldblatt, R. H. (1974), «Semantic analysis of orthologic»: *Journal of Phil. Logic*, 3, 19-35.

Goldblatt, R. H. (1984), «Orthomodularity is not elementary»: *Journal of Symbolic Logic*, 49, 401-404.

Hooker, C. A. (comp.) (1975-1979), *The Logico-Algebraic Approach to Quantum Mechanics*, vols. I, II, Reidel, Dordrecht.

Hermes, H. (1963), *La teoría de retículos y su aplicación a la lógica matemática*, Madrid.

Hardegree, G. (1977), «Reichenbach and the Logic of Quantum Mechanics»: *Synthese*, 35, 3-40.

Hardegree, G. (1979), «Charting the Labyrinth of Quantum Logics», en Beltrametti and van Fraassen (comps.), 1979.

Jauch, J. M. (1968), *Foundations of Quantum Mechanics*, Addison Wesley, Reading, Mass., Menlo Park, Ca.

Kochen, S. y Specker, E. P. (1967), «The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics»: *Journal of Mathematics and Mechanics*, 17, 59-87. Reproducido en C. A. Hooker (comp.), 1975.

Piron, C. (1964), «Axiomatique quantique»: *Helvetica Physica Acta*, 37, 439-468.

Putnam, H. (1969), «Is logic empirical?», en *Boston Studies in the Philosophy of Science*, V, Reidel, Dordrecht. Reproducido en C. A. Hooker (comp.), 1975.

Rasiowa, H. (1974), *Algebraic Approach to Non-Classical Logics*, North-Holland, Amsterdam.

Reichenbach, H. (1944), *Philosophical Foundations of Quantum Mechanics*, Univ. of California Press, Los Angeles.

Stachow (1979), «Sequential quantum logic», en Beltrametti y van Fraassen (comps.), 1979, 173-192.

Strauss, M. (1937), «Mathematics as Logical Syntax - a Method to Formalize the Language of a Physical Theory»: *Erkenntnis*, 7. Reproducido en C. A. Hooker (comp.), 1975.

Van Fraassen, B. C. (1970), «On the extensión of Beth Semantics of Physical Theories»: *Philosophy of Science*, 37, 325-339.

Van Fraassen, B. C. (1974), «The Labyrinth of Quantum Logics», en R. Cohen y M. Wartofsky (comps.), *Boston Studies in the Philosophy of Science*, vol. 13, Reidel, Dordrecht.